

۱- درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

- ☐ درست ☐ نادرست

حاصل $\cos(\pi + \alpha) - \cos(-\alpha)$ برابر با $2\cos \alpha$ است.

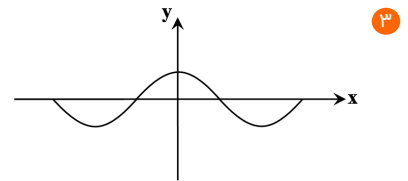
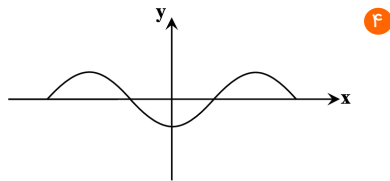
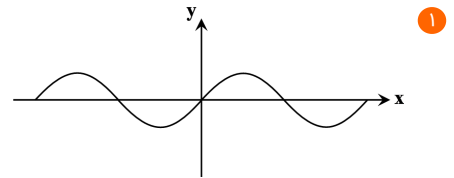
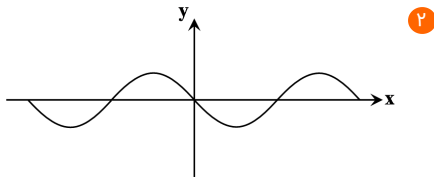
▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲)

نکته: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

نادرست

$$\cos(\pi + \alpha) - \cos(-\alpha) = -\cos \alpha - \cos \alpha = -2\cos \alpha$$

۲- نمودار تابع $y = \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲، فصل ۴ ◀ درس ۳)

نکته: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ و $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos \alpha$

$$y = \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = \sin(\pi + (\frac{\pi}{4} - x)) = -\sin(\frac{\pi}{4} - x) = -\cos x$$

ابتدا تابع موردنظر را ساده می کنیم:

با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ ، نمودار تابع $y = -\cos x$ که قرینه آن نسبت به محور طول ها می باشد، شکل گزینه ۴ است.

۳ - مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

ب) $\tan(-84.0^\circ)$

پ) $\tan(-15.0^\circ)$

ت) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

ث) $\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right)$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲)

نکات:

۱) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

۲) $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

۳) $\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$

۴) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

۵) $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$

با استفاده از نکات فوق، مقادیر خواسته شده را محاسبه می کنیم.

الف) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\tan(-84.0^\circ) = -\tan(84.0^\circ) = -\tan(5 \times 18.0^\circ - 6.0^\circ) = -\tan(-6.0^\circ) = \tan 6.0^\circ = \sqrt{3}$

پ) $\tan(-15.0^\circ) = -\tan 15.0^\circ = -\tan(18.0^\circ - 3.0^\circ) = -(-\tan 3.0^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ت) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ث) $\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

۴ - حاصل $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟

۱) $\sin \alpha$

۲) $-\sin \alpha$

۳) $\cos \alpha$

۴) $-\cos \alpha$

پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲)

نکته: $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \cos \theta$

در عبارت داده شده، مقدار $\frac{3\pi}{4}$ را به صورت $\pi + \frac{\pi}{4}$ در نظر می گیریم. داریم:

$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos \alpha$

۵ - درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

- □ درست □ نادرست

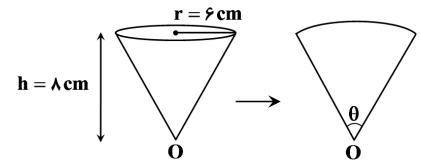
مقدار $\cos 5$ منفی است. (۵ در واحد رادیان است).

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۱)

نادرست؛ می دانیم هر رادیان تقریباً 57° درجه است، پس:

$\cos 5 > 0 \Rightarrow \text{ناحیه } 4 \Rightarrow 285^\circ = 5 \times 57^\circ \Rightarrow 5 \text{ رادیان}$

۶ - شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط رسم شده است. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند درجه است؟



۱ ۷۲°

۲ ۱۰۸°

۳ ۱۴۴°

۴ ۲۱۶°

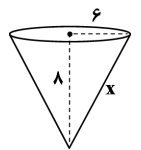
پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴ درس ۱)

نکته ۱: به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است، قطاع گفته می شود.

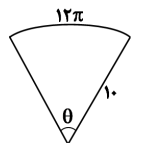
نکته ۲: همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ بر حسب رادیان و طول کمان ℓ روبه رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

محیط قاعده مخروط برابر با 12π است که همان طول کمان قطاع دایره است.

حال مطابق شکل و به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

عدد $x = 10$ شعاع دایره گسترده شده است. و مطابق نکته ۲ داریم:

$$\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} = \frac{6 \times 180^\circ}{5} = 216^\circ$$

نام و نام خانوادگی:
نام درس: حسابان

نام مدرسه: دبیرستان دوره دوم پسرانه شاهد
آزمون مستمر فصل ۴ حسابان ۱

پایه: داوطلب کنکور ریاضی
نام دبیر: آقای معیری

۷ - مقدار عددی هریک از عبارت های زیر را به دست آورید.

نام و نام خانوادگی:

نام مدرسه: دبیرستان دوره دوم پسرانه شاهد

پایه: داوطلب کنکور ریاضی

نام درس: حسابان

آزمون مستمر فصل ۴ حسابان ۱

نام دبیر: آقای معیری

الف) $\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ)$

یم:
Sin
Co

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{30}$$

$$\frac{20}{\pi}$$

نکته: به طور خلاصه، در این نسبت های مثلثاتی، می توان ضرایب زوج $\pi(2k)$ را در نظر نگرفت؛

پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ درس ۱)

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$



راه حل اول: زاویه θ بر حسب رادیان و طول کمان ℓ روبه رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است: $\theta = \frac{\ell}{r}$

$$\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(360^\circ - 60^\circ) = -\sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$



نکته (نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):
طول کمانی که هر دو قمره طی می کنند برابر است، پس داریم:

راه حل دوم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\ell_A}{r_A} = \frac{\ell_B}{r_B} \Rightarrow r_A \theta_A = r_B \theta_B \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{\theta_B}{\theta_A} = \frac{6}{\pi} = \frac{20}{\pi}$$

$$\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(360^\circ - 60^\circ)$$

$$= \sin \pi \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos \pi \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(360^\circ) \cos(60^\circ) + \sin(360^\circ) \sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

نکته: اگر تفاضل زوایا π رادیان باشد، آن گاه داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

راه حل سوم:

$$\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ) = \sin(225^\circ) + \cos(300^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) + \cos(270^\circ + 30^\circ) = -\sin(45^\circ) + \sin(30^\circ)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

(ب)

نکته (نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

نکته (نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

راه حل اول:

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos(45^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(45^\circ) \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

راه حل دوم:

$$\cos(15^\circ) = \sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ) \cos(45^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

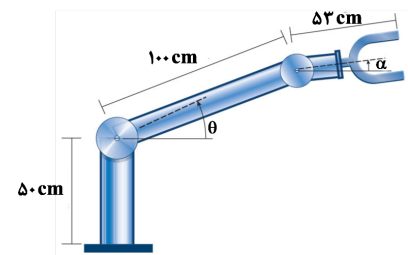
راه حل سوم:

$$\cos(15^\circ) = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos(60^\circ) \cos(45^\circ) + \sin(60^\circ) \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

راه حل چهارم:

$$\cos 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2(15^\circ) = \frac{1 + \cos(30^\circ)}{2} \Rightarrow \cos^2(15^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \cos(15^\circ) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

- ۹- اگر ربات شکل روبه رو برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5 \text{ cm}$ ، مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده باشد، زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟ $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$



۹۰ ۴

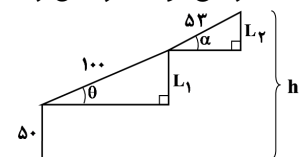
۶۰ ۳

۳۰ ۲

۱ صفر

پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۳)

ابتدا ارتفاع نوک گیره این ربات را از سطح زمین برحسب زاویه های θ و α می نویسیم:

$$\sin \theta = \frac{L_1}{100} \Rightarrow L_1 = 100 \sin \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{L_2}{53} \Rightarrow L_2 = 53 \sin \alpha$$

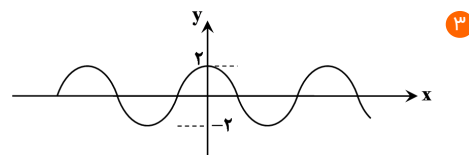
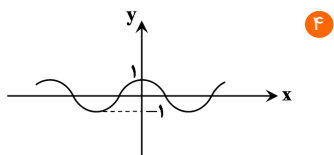
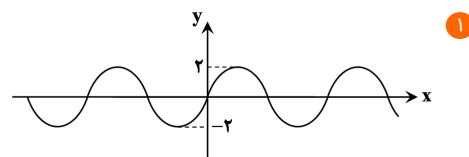
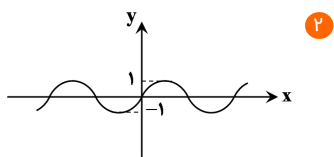
بنابراین ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) برابر است با:

$$h = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

با جایگذاری $h = 23/5$ و $\alpha = -30^\circ$ در رابطه بالا داریم:

$$23/5 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 23/5 = 50 - 26/5 + 100 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

کدام گزینه نمودار تابع $y = 2\sin \frac{x}{4} \times \cos \frac{x}{4}$ را به درستی نمایش می دهد؟

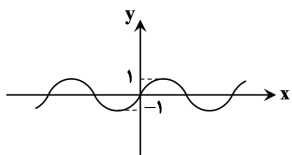


پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ درس ۳، فصل ۴ درس ۴)

نکته ۱: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

نکته ۲: نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت روبه رو است:



مطابق نکته ۱ می توان نوشت: $y = 2\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \Rightarrow y = \sin x$

بنابراین مطابق نکته ۲، نمودار تابع داده شده گزینه ۲ می باشد.

۱۱ - اگر بدانیم $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{5}{13}$ و انتهای کمان α در ربع سوم و انتهای کمان β در ربع چهارم قرار داشته باشد، انتهای کمان زاویه $(\alpha + \beta)$ در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می گیرد؟

چهارم ۴

سوم ۳

دوم ۲

اول ۱

پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: دانش * حسابان ۱ (فصل ۴ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

ابتدا مقادیر $\sin \beta$ و $\cos \alpha$ را به دست می آوریم:

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{144}{169} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \sin \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

حال مقادیر $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ را به دست می آوریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{12}{13}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-15 + 48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{-20 - 36}{65} = -\frac{56}{65}$$

با توجه به اینکه $\sin(\alpha + \beta) > 0$ و $\cos(\alpha + \beta) < 0$ می توان نتیجه گرفت که انتهای کمان زاویه $\alpha + \beta$ در ربع دوم قرار دارد.